אינדקסולוגיה או מבוא (לחלוטין) לא-פורמלי לטנסורים

אינדקס יכול לתאר כל מיני דברים. כיוון מרחבי $i=1,2,3$ x_i, איזו קואורדינטה מוכללת בוחרים $k=1..N$ q_k ועוד.

כאשר אינדקס חוזר פעמיים (בדיוק) באופן כפלי אנו מבינים שהכוונה היא שצריך לסכום עליו למשל $x_i y_j z_i \equiv \sum_i x_i y_j z_i = y_j \sum_i x_i z_i$. הסכימה היא רק אותו החלק הכיפלי $v_i v_i + w = (\sum_i v_i v_i) + w \neq \sum_i (v_i v_i + w)$.

כאשר החזרה היא באופן חיבורי האינדקס המשותף מתאר את הסכום כאינדקס אחד, כמו בחיבור וקטורים $V_a + W_a \equiv (V+W)_a$. כאשר סוכמים על אינדקס ניתן לתת לו איזה שם שרוצים $x_i(u_i v_j + u_j v_i) = x_k(u_k v_j + u_j v_k)$. לעיתים נוח לשנות שם של אינדקס $x_i x_i - x_k x_k = x_i x_i - x_i x_i = 0$.

הסיבה לכך שמוסכמות אלו הן מאד שימושיות נובעת מתחום הקרוי חשבון טנסורי, אליו לא נכנס. כעקרון טנסור הוא גודל שיש לו מספר כלשהו של אינדקסים, והמקיים תכונות מסוימות. למספר האינדקסים של טנסור קוראים הדרגה (rank) שלו. כך טנסור מדרגה 0 הוא סקלר (גודל חסר אינדקסים), טנסור מדרגה 1 הוא וקטור (למשל x_i), מדרגה 2 מטריצה (למשל δ_{ij}), וכו'.

בתחומים מסוימים של פיסיקה ומתמטיקה (למשל יחסות כללית, גאומטריה דיפרנציאלית) מקובל לרשום את האינדקסים גם למעלה וגם למטה (למשל δ_i^j), ואז עשוי להיות הבדל בין אינדקס עליון לתחתון $g_{ij} \neq g_i^j \neq g^{ij}$. בתחומים מסוימים יש מוסכמות עוד יותר מסובכות. אנחנו לא נעשה הבחנות כאלה.

טנסורים שימושיים:

א. הדלתא של קרונקר

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}.$$

שימו לב שטנסור זה "משנה את שם האינדקס" $\delta_{ij} x_j = x_i$.

ב. הטנסור האנטי-סימטרי ממעלה 3, הקרוי גם טנסור לוי-צ'יוויטה

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & i,j,k \text{ cyclic permutation of } 1,2,3 \\ -1 & i,j,k \text{ anti-cyclic permutation} \\ 0 & \text{otherwise (i.e. 2 indices are the same)} \end{cases}$$

(ניתן להשתמש בטנסור זה רק כשכל האינדקסים שלו יכולים לקבל ערכים 1,2,3 למשל אם הם מתארים כיוון מרחבי). אחת הדרכים להגדיר מכפלה וקטורית היא באמצעות טנסור זה $(\vec{x} \times \vec{y})_i = \varepsilon_{ijk} x_j y_k$, ובאופן דומה ה-curl $(\vec{\nabla} \times \vec{x})_i = \varepsilon_{ijk} \partial_j x_k$ ($\partial_j \equiv \frac{\partial}{\partial x_j}$).

קיים קשר מאד שימושי בין שני טנסורים אלו $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$. אפשר להשתמש בו כדי לפתח זהויות וקטוריות רבות המכילות מספר מכפלות וקטוריות, או curl. לעיתים צריך להשתמש בציקליות של ε כדי להגיע לצורה זו $\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{jki}$.

סכימה מרובה – בסכימה של אינדקסים יכול להיות מצב בו אותו אבר נספר מספר פעמים. למשל $\delta_{ij}\delta_{ij} = \delta_{ii} = N$, כאשר N הוא הערך המכסימלי של i. באופן דומה $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kij} = \delta_{ii}\delta_{jj} - \delta_{ij}\delta_{ji} = N^2 - N = 9 - 3 = 6$ (האינדקסים של ε הם מרחביים, ולכן $N=3$).

כאשר חושבים על טנסור ממעלה 2 כעל מטריצה צריך להחליט איזה אינדקס מתאר את השורות, ואיזה את העמודות. בד"כ האינדקס הראשון יתאר את השורות, והשני את העמודות. למשל אם

A היא מטריצה שמתוארת שרכיביה הם A_{ij} כפל בוקטור מימין ייתן $(A\vec{v})_i = A_{ij}v_j$, ומשמאל $(\vec{v}^T A)_i = v_j A_{ji} = A_{ji}v_j$, כאשר $(A^T)_{ij} = A_{ji}$.

כל מטריצה ניתן לפרק לחלק סימטרי ואנטי-סימטרי

$A = A_s + A_a$, כאשר $A_s = \frac{A + A^T}{2}$, $A_a = \frac{A - A^T}{2}$, או ברכיבים $A_{ij} = (A_s)_{ij} + (A_a)_{ij}$, כאשר $(A_s)_{ij} = \frac{A_{ij} + A_{ji}}{2}$, $(A_a)_{ij} = \frac{A_{ij} - A_{ji}}{2}$. החלק הסימטרי מקיים $A_s^{\ T} = A_s$, והאנטי-סימטרי מקיים $A_a^{\ T} = -A_a$. למשל עבור $A_{ij} = \partial_i u_j$ נקבל $(A_a)_{ij} = \frac{A_{ij} - A_{ji}}{2} = \frac{\partial_i u_j - \partial_j u_i}{2}$.

כאשר כופלים ביטוי בעל שני אינדקסים (תמיד ניתן לחשוב עליו כעל מטריצה בשני אינדקסים אלו) בביטוי סימטרי ביחס לשני אינדקסים אלו ייישאר בתוצאה רק החלק הסימטרי, למשל $A_{ij}x_i x_j = (A_s)_{ij} x_i x_j$. כאשר כופלים אותו בביטוי אנטי-סימטרי ייישאר רק החלק האנטי סימטרי $A_{ij}(x_i v_j - v_i x_j) = (A_a)_{ij}(x_i v_j - v_i x_j)$. הסיבה לכך היא שכפל של ביטוי סימטרי בביטוי אנטי-סימטרי מתאפס. הוכחה: תהי A_{ij} אנטי-סימטרית, ו- B_{ij} סימטרית, אזי $A_{ij}B_{ij} = (-A_{ji})B_{ji} = -A_{ij}B_{ij}$, כאשר במעבר הראשון השתמשנו בתכונות הסימטרייה, ובשני החלפנו את שמות האינדקסים עליהם אנו סוכמים. הגענו לביטוי שנראה כמו $x = -x$, והעברת אגף תיתן $A_{ij}B_{ij} = 0$.