## פיתוח של גלי לחץ (גלי קול) – הפרעות קטנות ומהירות הקול

נתחיל בביצוע לינאריזציה של משוואות הזרימה הבסיסיות (אוילר ורציפות). זאת נעשה על ידי החלפת המהירות והצפיפות ב- $\vec{u} = \vec{u}_0 + \vec{u}\,'$ , $\rho = \rho_0 + \rho\,'$, כאשר ההפרעות הקטנות מסומנות בגרש, והזנחת ביטויים המערבים מכפלות של ההפרעות הקטנות (לדוגמה, $\rho\,'\vec{u}\,'$). בנוסף, נבחר מערכת ייחוס שנעה עם הגז, כלומר $\vec{u}_0 = 0$ ומהירות הזרימה נובעת רק מההפרעה.

נכתוב מחדש את משוואת הרציפות כ-

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\rho}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot\left(\rho\vec{u}\right)=0 \;\Rightarrow\; \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_0+\rho\,'\right)+\vec{\nabla}\cdot\left[\left(\rho_0+\rho\,'\right)\left(\overrightarrow{u_0}+\overrightarrow{u\,'}\right)\right]=0 \;\Rightarrow\\ &\Rightarrow\; \frac{\partial\rho_0}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot\left(\rho_0\overrightarrow{u_0}\right)+\frac{\partial\rho\,'}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot\left(\rho_0\overrightarrow{u\,'}+\rho\,'\overrightarrow{u_0}\right)+\vec{\nabla}\cdot\left(\rho\,'\overrightarrow{u\,'}\right)=0\end{aligned} \tag{1}$$

אם נשתמש במשוואת הרציפות הלא-מופרעת (שבהכרח מתקיימת) נוכל לראות כי

$$\frac{\partial\rho_0}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot\left(\rho_0\overrightarrow{u_0}\right)=0 . \tag{2}$$

כתוצאה מהזנחת ביטויים מסדר שני ובחירת מערכת הייחוס שלנו, נקבל כי

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\rho\,'\overrightarrow{u\,'}\right)\approx 0\;;\;\vec{\nabla}\cdot\left(\rho\,'\overrightarrow{u_0}\right)=0 . \tag{3}$$

אם נחזור כעת ל- (1) נוכל לראות כי משוואת הרציפות המופרעת תיראה כך:

$$\boxed{\frac{\partial\rho\,'}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot\left(\rho_0\overrightarrow{u\,'}\right)=0} . \tag{4}$$

באותו אופן, נכתוב מחדש את משוואת אוילר כ-

$$\begin{aligned}&\rho\left[\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\left(\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{u}\right]=-\vec{\nabla}p=-\frac{\partial p}{\partial\rho}\vec{\nabla}\rho\equiv-c^2\vec{\nabla}\rho \;\Rightarrow\\ &\Rightarrow\;\left(\rho_0+\rho\,'\right)\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{u}_0+\vec{u}\,'\right)+\left(\left(\vec{u}_0+\vec{u}\,'\right)\cdot\vec{\nabla}\right)\left(\vec{u}_0+\vec{u}\,'\right)\right]=-c^2\vec{\nabla}\left(\rho_0+\rho\,'\right)\end{aligned} \tag{5}$$

כאשר השתמשנו בקשר הפוליטרופי בין הצפיפות והלחץ והגדרנו את הגודל $c^2\equiv\dfrac{\partial p}{\partial\rho}$ . שימוש במשוואת אוילר הלא-מופרעת ובבחירה שלנו במערכת הייחוס מצמצם את (5) ל-

$$.\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_0\vec{u}\,'\right)-\vec{u}\,'\frac{\partial\rho_0}{\partial t}+\left(\vec{u}\,'\cdot\vec{\nabla}\right)\left(\rho_0\vec{u}\,'\right)+\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho'\vec{u}\,'\right)-\vec{u}\,'\frac{\partial\rho'}{\partial t}=-c^2\vec{\nabla}\rho' \qquad (6)$$

אם כעת נזניח ביטויים מסדר שני בהפרעות הקטנות נקבל כי

$$.\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_0\vec{u}\,'\right)-\vec{u}\,'\frac{\partial\rho_0}{\partial t}=-c^2\vec{\nabla}\rho' \qquad (7)$$

פתיחה של הנגזרת הראשונה בביטוי (7) וארגון מחדש של האיברים הנותרים נותן לנו את צורתה המופרעת של משוואת אוילר:

$$.\boxed{\rho_0\frac{\partial\vec{u}\,'}{\partial t}=-c^2\vec{\nabla}\rho'} \qquad (8)$$

כעת, אם נבצע דיברגנס על משוואה (8) נקבל כי

$$,\vec{\nabla}\cdot\left[\rho_0\frac{\partial\vec{u}\,'}{\partial t}\right]=-c^2\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\rho'\right)\ \Rightarrow\ \frac{\partial}{\partial t}\left[\vec{\nabla}\cdot\left(\rho_0\vec{u}\,'\right)\right]=-c^2\nabla^2\rho' \qquad (9)$$

כאשר את הביטוי בסוגריים המלבניים נוכל לכתוב מחדש באמצעות שימוש ב- (4) ולקבל

$$.\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial\rho'}{\partial t}\right)=-c^2\nabla^2\rho'\ \Rightarrow\ \boxed{\frac{\partial^2\rho'}{\partial t^2}=c^2\nabla^2\rho'} \qquad (10)$$

משוואה (10) היא בעלת צורה של משוואת גלים, עבור הפרעת הצפיפות, כאשר הגודל $c^2$ מזוהה כריבוע מהירות הגל. מכיוון שהגדרנו גודל זה כ- $\frac{\partial p}{\partial\rho}$, שהיא מהירות הקול בתווך פוליטרופי, הרי ההפרעות בצפיפות מתקדמות במהירות הקול.

מכיוון ש- $p=p\left(\rho\right)$ נין גם לקבל את משוואת הגלים עבור הפרעת הלחץ כ- $.\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2}=c^2\nabla^2 p'$