Continuum theory course,
Gal Sarid,
Spring 2006

משוואת אוילר:

הכוח הכולל, הפועל על אלמנט זרימה בנפח δV הוא $\left(-\vec{\nabla}P+\rho\vec{g}\right)\delta V$, כאשר אנו מתייחסים לנוכחות של כוח גוף (body force) כבידתי לאלמנט יחידת מסה, $\vec{g}$. לפי ניוטון, כוח זה שווה למכפלת מסת האלמנט בתאוצה, כלומר $\rho\delta V\dfrac{d\vec{u}}{dt}$. כך אנו מקבלים את משוואת אוילר, בצורתה: $\boxed{\dfrac{d\vec{u}}{dt}=-\dfrac{1}{\rho}\vec{\nabla}P+\vec{g}}$. משוואה זו תקפה בצורתה הזו עבור זורם אידיאלי, שמקיים את ההנחות הבאות:

1) אי-דחיסות – אלמנט/חלקיק זרימה לא משנה את נפחו בעודו זז. כלומר, מתקיים $\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{u}=0}$.
2) הצפיפות היא קבועה עבור כל חלקיקי הזרימה בכל זמן t. כלומר, מתקיים $\boxed{\dfrac{d\rho}{dt}=0}$.
3) הכוח הפועל על אלמנט שטח $\vec{n}\delta s$ של חלקיק הזרימה הוא $P\vec{n}\delta s$, כאשר P היא פונקציה סקלרית הנקראת לחץ.

מהנחה (3) נוכל לקבל את צורת הכוח שפועל על חלקיק זרימה, ברימה חופשית. ניקח משטח s הכולא "בועת" זורם. הכוח המופעל על ידי הזורם מסביב לבועה על כל אלמנט שטח של שפת הבועה, δs, הוא $P\vec{n}\delta s$. מכך נוכל לרשום את הכוח הכולל כ- $-\int_s P\vec{n}\delta s=-\int_V\vec{\nabla}PdV$ (לפי משפט הדיברגנס). כוח זה פועל על כל אלמנט δV ולכן, אם $\vec{\nabla}P$ היא פונקציה רציפה, הכוח הפועל על כל חלקיק זרימה יהיה $-\vec{\nabla}P\delta V$.

על ידי שימוש במשוואת הרציפות נוכל להסיק מההנחות הנ"ל (ומהנחת הזורם כאידיאלי) כי: $\dfrac{\partial\rho}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot\left(\rho\vec{u}\right)=\dfrac{\partial\rho}{\partial t}+\rho\vec{\nabla}\cdot\vec{u}+\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\rho=\boxed{\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\rho=0}$. כלומר, גרדיאנט הצפיפות מאונך לכיוון המהירות.

ממשוואת אוילר אנו רואים כי $\vec{u}$ מקביל ל- $\vec{\nabla}P$ ולכן מתקיים גם כי $\vec{\nabla}P$ מאונך ל- $\vec{\nabla}\rho$. לכן נוכל לקבל את ההנחה כי $\rho=const.$.